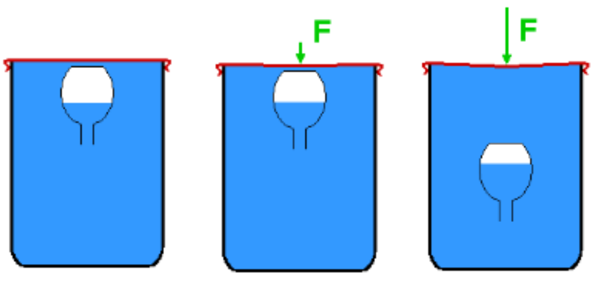
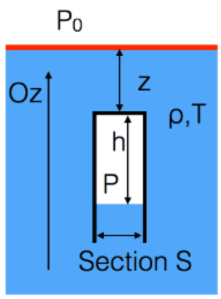
*** *Le ludion (Examen SIE 2015)*

Un ludion est un petit montage de physique souvent présenté comme une curiosité de salon ou comme un jouet. Il est constitué d'un objet creux rempli d'air, dont l'ouverture est vers le bas. Cet objet est immergé dans un récipient contenant de l'eau et fermé par une membrane élastique. L'air qu'il contient sert à le faire flotter. L'application d'une pression sur la membrane fait descendre l'objet creux et le relâchement de la pression le fait remonter (voir figure ci-dessous).





On considérera un flotteur de forme cylindrique de section S convenablement lesté pour que l'ouverture soit vers le bas. On note V le volume de gaz présent dans le ludion, h la hauteur de la colonne de gaz, z la profondeur du ludion mesurée depuis le sommet du ludion. On considère le volume des parois négligeable. A l'intérieur, il y a n moles d'air considéré comme un gaz parfait. La pression du gaz est notée P. L'eau est considérée comme un fluide incompressible de masse volumique ρ et est à la température T. On note P_0 la pression appliquée sur la membrane. En l'absence de force appliquée sur la membrane, P_0 est égale à la pression atmosphérique, P_{atm}.

1. En appliquant les lois de l'hydrostatique, exprimer la pression P du gaz dans le ludion en fonction de P_0, ρ, z, h et l'accélération de la pesanteur g.

$$P = P_0 + \rho g z + \rho g h$$

2. On considère que le gaz dans le ludion reste à la température T, les évolutions sont isothermes et quasi-statiques. Ecrire la relation des gaz parfaits satisfaite par le gaz en explicitant P et V en fonction de P_0, ρ, z, h, g et S.

$$nRT = (P_0 + \rho g(h+z))\,Sh$$

3. On note M la masse totale du ludion. Exprimer la force d'Archimède qui s'exerce sur le ludion et en déduire la condition indiquant si le ludion monte ou bien coule en fonction de M, S, h et ρ.

$$\rho S h - M \begin{cases} > 0 & \text{le ludion monte} \\ = 0 & \text{le ludion reste immobile} \\ < 0 & \text{le ludion coule} \end{cases}$$

4. En éliminant h entre les résultats obtenus aux questions 2 et 3, exprimer la pression P_t qui doit être exercée sur la membrane pour que le ludion reste immobile, c'est-à-dire telle que :

$$\begin{array}{ll} P_0 > P_t & \text{le ludion coule} \\ P_0 = P_t & \text{le ludion reste immobile} \\ P_0 < P_t & \text{le ludion monte} \end{array}$$

$$P_t = \frac{\rho nRT}{M} - \frac{gM}{S} - \rho g z$$

5. Le ludion est en haut ($z = 0$) et $P_0 = P_{\text{atm}}$, la quantité de gaz est telle qu'il flotte. Quelle est la surpression P_{appl} à appliquer sur la membrane pour le faire couler ?

$$P_{\text{appl}} = \frac{\rho nRT}{M} - \frac{gM}{S} - P_{atm}$$

A.N.: $T = 300\,K$, $R = 8\,J\,K^{-1}\,mol^{-1}$, $\rho = 10^3\,kg\,m^{-3}$, $g = 10\,m\,s^{-2}$, $M = 30\,g$, $S = 3\,cm^2$, $n = 1{,}5 \times 10^{-3}\ mol$, $P_{atm} = 10^5\,N\,m^{-2}$.

$$P_{\text{appl}} = 0{,}19 \cdot 10^5\ Pa$$

Si on appuie avec un doigt de surface $1\,\text{cm}^2$, quelle est la force F_{appl} à exercer sur la membrane ?

$$F_{\text{appl}} = P_{appl} \times S = 5{,}7\,N$$

6. Le récipient ne doit pas être trop long : quelle est la profondeur critique z_c pour laquelle le ludion ne pourra plus remonter lorsque l'on cesse d'appliquer P_{appl} (c'est à dire lorsque P_0 reprend sa valeur P_{atm}) ?

$$z_c = \frac{nRT}{Mg} - \frac{M}{\rho S} - \frac{P_{atm}}{\rho g}$$

A.N.: $T = 300\,K,\ R = 8\,J\,K^{-1}\,mol^{-1},\ \rho = 10^3\,kg\,m^{-3},\ g = 10\,m\,s^{-2},\ M = 30\,g,\ S = 3\,cm^2,\ n = 1{,}5 \times 10^{-3}\ mol,\ P_{atm} = 10^5\,N\,m^{-2}$.

$$z_c = 1{,}9\ m$$

① On applique la loi de l'hydrostatique. La pression dans le gaz est égale à la pression dans l'eau à la profondeur $z+h$ et donc

$$P_0 - P = -\rho g (z+h)$$

$$\Longrightarrow \quad P = P_0 + \rho g (z+h)$$

② Le gaz est à la température T. On applique la loi des gaz parfaits

$$nRT = PV_{gaz} = P.\,Sh$$

$$= \left[P_0 + \rho g (z+h)\right] S.h$$

③ On néglige le volume des parois. La force d'Archimède s'exerce sur le volume du gaz dans le ludion

La force d'Archimède est dirigée vers le haut et a pour module $F_A = \rho g V_{gaz} = \rho S h g$

Le ludion est aussi soumis à son poids dirigé vers le bas et de module $F_g = Mg$

si $F_A > F_g$ le ludion monte

$$\rho S h g > Mg$$

soit $\rho S h - M > 0$ le ludion monte

si $\rho S h - M = 0$ immobile

④ Lorsque le ludion est immobile

$$\rho S h - m = 0 \Rightarrow h = \frac{m}{\rho S}$$

Dans cette situation on a $P_t = P_0$

et donc

$$nRT = hS\left(P_0 + \rho g(z+h)\right)$$

$$\Rightarrow P_t = P_0 = \frac{nRT}{hS} - \rho g z - \rho g h$$

avec $h = \frac{m}{\rho S}$

$$\Rightarrow P_t = \frac{nRT\,\rho \cancel{S}}{\cancel{S}\,m} - \rho g z - \cancel{\rho} g \frac{m}{\cancel{\rho} S}$$

$$P_t = \frac{\rho nRT}{m} - \rho g z - g\frac{m}{S}$$

⑤ $z = 0$ et $P_0 = P_{atm} + P_{appl}$

donc $P_{appl} = \dfrac{\rho nRT}{m} - \dfrac{mg}{S} - P_{atm}$

AN : $$P_{appl} = \underbrace{\frac{\cancel{10}^3 . 1,5 . \cancel{10^{-3}}\, 8 . \cancel{3}00}{\cancel{3}0 . 10^{-3}}}_{8 . 1,5 . 10^{2+3-1}} - \underbrace{\frac{\cancel{3}0 . 10^{-3} . 10}{\cancel{3} . 10^{-4}}}_{10^{2-3+4}} - 10^5$$

$$\underbrace{8 \; 1,5 . 10^4}_{1,2 . 10^5} - 10^3 - 10^5$$

$$1,2 . 10^5 - 10^3 - 10^5 = 0,19 . 10^5 \text{ Pa}$$

$F_{appl} = P_{appl} \cdot S = 5{,}7\,N$ la surface du doigt n'a pas d'influence

⑥ $P_{appl} = 0$ $P_t = P_{atm}$ et le ludion est à la profondeur z_c

$$P_t = P_{atm} = \frac{\rho n R T}{m} - \rho g z_c - \frac{mg}{S}$$

$$\Rightarrow \rho g z_c = \rho \frac{nRT}{m} - \frac{mg}{S} - P_{atm}$$

$$z_c = \frac{nRT}{mg} - \frac{m}{\rho S} - \frac{P_{atm}}{\rho g}$$

passé cette profondeur le poids l'emportera toujours sur la poussée d'Archimède *

AN : $z_c = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot \cancel{3}00}{\cancel{3}0 \cdot 10^{-3} \cdot 10} - \frac{\cancel{3}0 \cdot 10^{-3}}{10^3 \cdot \cancel{3} \cdot 10^{-4}} - \frac{10^5}{10^3 \cdot 10} = 1{,}9\,m$

* Autrement dit, à cette profondeur pour faire remonter le ludion, il faudrait pouvoir diminuer P_0 en dessous de P_{atm}